

[1] Zur Theorie der Radiometerkräfte.

Von A. Einstein in Berlin.

(Eingegangen am 21. Juli 1924.)

Auf Grund schematischer Annahmen über den Mechanismus der Molekülbewegung in Gasen werden die Kräfte annähernd berechnet, welche auf gegen die freie Weglänge λ kleine Körper sowie auf die Randzone gegen λ großer Körper im Wärmestrome wirken.

[2] Die Theorie der durch Temperaturdifferenzen bewirkten Kraftwirkungen und Druckdifferenzen in Gasen ist von Knudsen für den Fall befriedigend geklärt worden, daß die freie Weglänge groß ist gegenüber den maßgebenden Gefäßdimensionen. Dagegen herrscht noch ziemliche Unklarheit über die Ursachen der Thermokräfte in den Fällen, wo die freie Weglänge von derselben Größenordnung oder kleiner als die maßgebenden Gefäßdimensionen sind. Ich will im folgenden eine mehr qualitative Betrachtung der hier obwaltenden Verhältnisse geben, das Quantitative nur der Größenordnung nach berücksichtigen. Wenn die hier gegebenen Betrachtungen auch recht elementarer Natur sind, so haben sie mir doch über Unklarheiten weggeholfen, und ich darf wohl hoffen, daß manchem Leser mit dieser kurzen Darlegung gedient ist.

§ 1. Gegen die Weglänge kleiner Körper in einem Wärmestrom. Wir denken uns zunächst ein unendlich ausgedehntes Gas, in welchem längs der positiven x -Achse ein stationärer, homogener Wärmestrom vorhanden ist. Die Molekularbewegung denken wir uns weitgehend schematisiert, indem wir allen Molekeln dieselbe Geschwindigkeit u zuschreiben, abgesehen von kleinen Differenzen, die wir für eine schematische Berücksichtigung des Wärmefflusses brauchen. Ferner rechnen wir so, wie wenn die Moleküle nur längs der Koordinaten-Achsen flögen. Die Weglänge λ behandeln wir als eine konstante Länge. All diese Schematisierungen können uns nur unwesentliche Fälschungen der Zahlenkoeffizienten in den Formeln bringen, ohne die Auffassung der Wesenszusammenhänge zu stören.

Wir betrachten zunächst die Molekülbewegung durch ein zur x -Achse senkrechtes, gegen λ kleines Flächenelement von der Größe σ . Materielle Strömung soll nicht vorhanden sein. Es laufen daher in

A. Einstein,

beiden Richtungen pro Sekunde genau gleich viele Moleküle durch σ hindurch, und zwar

$$\frac{1}{6} n \sigma u \quad (1)$$

Moleküle, wobei n die Zahl der Moleküle pro Volumeinheit bezeichnet. Damit wir der Tatsache des Wärmefflusses gerecht werden, müssen wir annehmen, daß die Geschwindigkeit der Moleküle u_+ in der Richtung der positiven x -Achse etwas größer als u sei; das entsprechend definierte u_- muß entsprechend etwas kleiner als u sein. Der Wärmestrom σf durch das Flächenelement ist gegeben durch

$$\sigma f = \frac{1}{6} n \sigma u \left(\frac{m}{2} u_+^2 - \frac{m}{2} u_-^2 \right). \quad (2)$$

Berücksichtigen wir den Zusammenhang

$$\frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} \kappa T$$

sowie den Umstand, daß für die Molekülgeschwindigkeiten u_+ bzw. u_- Temperaturen an den Stellen maßgebend sind, in denen der letzte Zusammenstoß stattgefunden hat ($\lambda =$ freie Weglänge), so ergibt sich an Stelle von (2)

$$f = -\frac{n}{2} \kappa \lambda u \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (2a)$$

Nun betrachten wir an Stelle des Flächenelementes einen kleinen Körper von der Flächenausdehnung σ . Die auf diesen in der x -Richtung auftreffenden Moleküle geben einen Impulsüberschuß K in Richtung der positiven X -Richtung

$$K = \frac{1}{6} n \sigma u (m u_+ - m u_-). \quad (3)$$

Vernachlässigt man den Umstand, daß beim Verlassen des Körpers durch die zusammenstoßenden Moleküle nochmals eine Impulswirkung auf den Körper entsteht, welche einen gewissen Bruchteil der eben berechneten ausmacht, so ist K auch die auf den Körper wirkende bewegende Kraft. Aus (2) und (3) ergibt sich mit Rücksicht darauf, daß u_+ und u_- von u nur wenig abweichen

$$K = \frac{\sigma f}{u} = -\frac{1}{2} p \frac{\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \sigma, \quad (3a)$$

wobei p den Gasdruck bedeutet. Bei dieser Formel wie in (2) bedeutet f natürlich nur den Teil des Wärmefflusses, der auf der translatorischen Bewegung der Moleküle beruht.

Diese Kraft K wird das Teilchen, wenn es frei ist, in Richtung der positiven x -Achse bewegen. Um die Geschwindigkeit v dieser Bewegung kennenzulernen, brauchen wir nur die Reibungskraft K' zu berechnen, welche durch das Gas auf das Teilchen ausgeübt wird, wenn es mit der Geschwindigkeit v durch das Gas bewegt wird. Diese Reibungskraft entsteht im wesentlichen dadurch, daß der Körper jedem ihn treffenden Molekül im Mittel den Impuls mv mitteilt. Durch Ausführung der entsprechenden elementaren Rechnung erhält man

$$K' = -\frac{4}{3} n \sigma u \cdot m v. \quad (4)$$

Die Gleichsetzung von K und $-K'$ liefert

$$[3] \quad v = \frac{1}{4} \frac{f}{RT\eta} = -\frac{1}{8} u \frac{\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{4} \frac{f}{p}. \quad (5)$$

Diese Geschwindigkeiten, welche — solange die Teilchen gegen die freie Weglänge klein sind — von der Teilchengröße unabhängig sind, können recht erheblich werden. Bei $\lambda = 0,1$ cm und $\frac{\partial T}{\partial x} = 30$, $T = 300$ und H_2 als Gas erhält man etwa 1 m pro Sekunde, bei gewöhnlichem Druck und sonst gleichen Verhältnissen über 0,1 mm pro Sekunde.

Diese Kräfte werden z. B. bei der Abscheidung des Reifes und bei den elektrischen Heizapparaten zur Reinigung der Luft von Rauchteilchen eine entscheidende Rolle spielen.

§ 2. Kleines Loch in einer quer zum Wärmestrom stehenden dünnen Wand. Wir kommen nun zu einer Erscheinung, die das Gegenstück bildet zu der soeben betrachteten. Die Überlegung des § 1 beruhte nämlich hauptsächlich darauf, daß im Innern eines strömungsfreien Gases die Zahl der ein Flächenelement von beiden Seiten treffenden Moleküle gleich ist. Wir drücken dies so aus: die Bedingung der Strömungsgleichheit ist im Innern des wärmedurchströmten Gases erfüllt. Die berechnete, auf ein Teilchen ausgeübte Kraft ergab sich daraus, daß gleich viele Moleküle auf Vorder- und Rückseite des Teilchens verschieden großen Impuls mitbringen.

Dieser „Strömungsgleichheit“ im Gasinnern steht nun eine „Druckgleichheit“ mit Bezug auf die Wandungen des Gasraumes gegenüber. Es ist nämlich wohl bekannt und leicht zu zeigen, daß allenthalben auf die Wandungen des Gasraumes auch bei ungleichmäßiger Temperaturverteilung im Gase gleich große Druckkräfte pro

Flächeneinheit wirken müssen, wenn nur die betrachteten Wandteile genügend groß gegen die freie Weglänge, für sich genommen genügend gleichmäßig temperiert und durch Gasquerschnitte voneinander getrennt sind, welche in allen Abmessungen groß sind gegen die freie Weglänge. Dann sind eben die Begriffe und Gesetze der Hydrostatik der Kontinua anwendbar.

Es befinde sich in dem vorhin betrachteten Gase ein ebenes Blättchen, das senkrecht zum Wärmestrome, also parallel der yz -Ebene orientiert sei. Es sei groß gegenüber der freien Weglänge, und seine Ränder sollen Abstände von den übrigen Wandungen des Gasraumes haben, die groß sind gegenüber λ . Dann herrscht trotz Vorhandenseins des Wärmestromes Druckgleichheit.

Jedes Molekül, das von der Seite der negativen x auf die Platte stößt, möge die Geschwindigkeit u_n besitzen und mit der Geschwindigkeit u die Platte in der negativen x -Richtung wieder verlassen. v_n solcher Stöße mögen pro Flächen- und Zeiteinheit stattfinden. u_p , u und v_p seien die entsprechenden Größen für die andere Seite der Platte. Es ist hierbei vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeiten der auf beiden Seiten der Platte diese nach dem Zusammenstoß verlassenden Moleküle einander gleich seien. Die Bedingung der Druckgleichheit ist dann

$$\frac{p}{m} = v_n(u + u_n) = v_p(u + u_p). \quad (6)$$

Ferner muß der Wärmestrom auf beiden Seiten der Platte gleich groß sein, was durch die Gleichung ausgedrückt wird

$$\frac{2f}{m} = v_n(u_n^2 - u^2) = v_p(u^2 - u_p^2). \quad (7)$$

Durch Division dieser beiden Gleichungen erhält man zunächst

$$\frac{2f}{p} = u_n - u = u - u_p. \quad (8)$$

Setzt man dies in (6) ein, so erhält man, indem man $\frac{v_n + v_p}{2}$ durch

v ersetzt und dieses durch $\frac{nu}{6}$:

$$v_p - v_n = \frac{1}{6} \frac{nf}{p}. \quad (9)$$

Befindet sich in der Platte eine gegen die freie Weglänge kleine Öffnung von der Fläche σ , so müssen offenbar $(v_p - v_n) \sigma$ Moleküle in der Richtung der abnehmenden x pro Zeiteinheit mehr hindurchtreten

als in der umgekehrten Richtung $v_p - v_n$ mißt, also die Intensität eines die Öffnung durchsetzenden (rücklaufenden) Molekülstromes, dessen scheinbare Strömungsgeschwindigkeit gegeben ist durch die Gleichung

$$v_p - v_n = -nv. \quad (10)$$

Aus (9) und (10) folgt

$$v = -\frac{1}{6} \frac{f}{p}, \quad (10a)$$

welche Gleichung das Gegenstück zu Gleichung (5) bildet.

[5] § 3. Ursache gewisser Radiometerkräfte in dichteren Gasen. Diese Ergebnisse gehören im wesentlichen noch in den Bereich der Gesetze des Knudsen-Gases, in dem die wirksamen Körperabmessungen klein sind gegen die freie Weglänge im Gase. Indessen bieten sie auch den Schlüssel für gewisse Radiometererscheinungen in dichteren Gasen.

Es liege nämlich im Inneren des Gases senkrecht zu einem Wärmestrom ein Blättchen, dessen Abmessungen groß seien gegenüber der freien Weglänge λ . Ebenso seien die Abstände der Gefäßwände von den Rändern des Blättchens groß gegen λ . Genügend weit vom Rande des Blättchens wird dann am Blättchen Druckgleichgewicht herrschen, genügend weit außerhalb des Blättchens dagegen werden die in § 1 studierten Verhältnisse herrschen, welche bewirken, daß ein gegen λ kleiner Körper die Druckkraft $\frac{\sigma f}{u}$ erfährt.

Am Plattenrande wird ein allmählicher Übergang zwischen diesen beiden Zuständen des Gases stattfinden, dessen Breite von der Größenordnung λ ist. Es wird also auf die Längeneinheit des Plattenrandes eine Kraft von der Größenordnung

$$K = \frac{f\lambda}{u} = -\frac{1}{2} p \frac{\lambda^3}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (11)$$

wirken, solange die Abmessungen des Blättchens groß sind gegen die freie Weglänge.

Der Fall des einseitig erwärmten Blättchens ist insofern ähnlich, als auch hier eine Randzone von der angeführten Breite λ vorhanden sein wird, in welcher die Druckgleichheit auf beiden Blättchenseiten nicht erfüllt ist. In diesem Falle, der sich aber für eine quantitative Prüfung wenig eignet, finde ich für die auf die Längeneinheit des Randes wirkende Kraft den Ausdruck

$$K = -p\lambda \frac{\Delta \cdot T}{T}, \quad (11a)$$

welcher natürlich ebenfalls nur der Größenordnung nach Gültigkeit beansprucht.

Eine andere Ursache von Radiometerkräften liegt in der Gleitungsgeschwindigkeit, welche eine Wand dem Gase bei tangentialem Temperaturgefälle erteilt. Dies Phänomen, welches bereits Maxwell theoretisch erschlossen und Knudsen selbständig wiedergefunden hat, wird von den Herren Hettner und Czerni gegenwärtig bearbeitet.

[8]

Published in *Zeitschrift für Physik* 27 (1924): 1–6. Received 21 July 1924, published August–September 1924. For a manuscript with a different §3 and an additional §4, see [1 042] and [2 098] (§§3 and 4 only). The alternative sections are presented in note 5.

^[1]Radiometer forces are the forces that are responsible for the rotation of a radiometer, a device consisting of vanes, blackened on one side and reflective on the other, mounted on a spike, and enclosed in a partially evacuated container. Because the rotational motion of the vanes starts when the device is illuminated, it was initially thought that it was caused by light pressure. It was later realized that tangential forces exerted by gas molecules in the container, as a result of temperature gradients, are responsible for the motion (see, e.g., *Brush 1976*, chap. 5.5, for a historical overview). Einstein had been interested in radiometer forces before: in 1919 he suggested the theory of the radiometer as a dissertation topic to his cousin Edith Einstein (see Edith Einstein to Einstein, 29 April 1919 [Vol. 9, Doc. 31]). For his continued interest in the topic, see also Einstein to Paul Epstein, 4 June 1920 (Vol. 10, Doc. 42), and Edith Einstein to Einstein, 4 December 1921 (Vol. 12, Doc. 310). Edith Einstein's dissertation was published as *Einstein, E. 1922*.

^[2]See *Knudsen 1910c*.

^[3]In the equation, η should be n .

^[4]In eq. (9) as well as in (10a) below, $\frac{1}{6}$ should be $\frac{1}{3}$.

^[5]At this point the manuscript continues with a different §3 and an additional §4.

“§3. Wand mit Temperatursprung

In dem Falle, dass durch Bestrahlung oder sonstwie eine Temperaturdifferenz der beiden Wandflächen aufrecht erhalten wird, erhalten wir analoge Wirkungen, auch wenn kein Wärmestrom im Gase berücksichtigt wird. Wir betrachten wieder den Fall, dass die Kommunikation der Gasteile zu beiden Seiten der Wand eine solche ist, dass Druckausgleich praktisch vollständig erfolgt. Dem entspricht die Gleichung^[6]

$$p = 2v_n u_n = 2v_p u_p \quad \dots (11)$$

Setzt man

$$\Delta v = v_p - v_n \quad v = \frac{1}{2}(v_p + v_n)$$

$$\Delta u = u_p - u_n \quad u = \frac{1}{2}(u_p + u_n),$$

so erhält man^[7]

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta T}{2T} \quad \dots (11a)$$

Ist eine kleine Oeffnung (σ) in der Wand, so bezeichnet $-\Delta v$ die Intensität des Molekülstromes durch die Öffnung. Mit Rücksicht auf die Relationen

$$-\Delta v = n v$$

$$v = \frac{1}{6} n u$$

erhält man hieraus

$$v = \frac{1}{12} u \frac{\Delta T}{T} \quad \dots (11b)$$

welche Relation in diesem Falle an die Stelle von (10a) tritt. Um den Vergleich übersichtlicher zu gestalten, merken wir an, dass (10a) auch in der Form

$$v = -\frac{1}{12} u \frac{\lambda \frac{\partial T}{\partial x}}{T} \quad \dots (9b)$$

geschrieben werden kann.

§4.

Prinzipielles zu den bisherigen Überlegungen.

Befindet sich ein Gas im thermodynamischen Gleichgewicht, so sind an jeder Stelle in jeder Richtung die drei Bedingungen erfüllt

$$a) \quad v_+ = v_- \quad (\text{Strömungs-Gleichgewicht})$$

$$b) \quad mu_+ v_+ = mu_- v_- \quad (\text{Gleichgewicht der Impulsströme})$$

$$c) \quad \frac{1}{2} mu_+^2 v_+ = \frac{1}{2} mu_-^2 v_- \quad (\text{Gleichgewicht der Wärmeströme})$$

Findet ein Wärmestrom statt, so ist c) nicht erfüllt, sondern durch

$$c') \quad f = \frac{1}{2} m(u_+^2 v_+ - u_-^2 v_-)$$

zu ersetzen.

Ist $f \neq 0$, d.h. besteht ein Wärmestrom, so können a) und b) nicht gleichzeitig erfüllt sein. Im freien Gase wird keine Strömung vorhanden, also a) erfüllt sein. An die Stelle von b) tritt dann

$$b') \quad i = mu_+ v_+ - mu_- v_- = \frac{f}{u}.$$

Es ist also mit dem Wärmestrom ein Impulsstrom i verbunden, der sich als Kraftwirkung auf gegen λ kleine Körper äussert, die an jene Stelle gebracht werden.

Ist die betrachtete Stelle keine freie Stelle, sondern befindet sich dort ein gegen λ grosses Blättchen, welches mit seiner Fläche senkrecht gegen den Wärmestrom gestellt ist, so findet an ihm Druck-Gleichgewicht statt. Dies kommt ungefähr, wenn auch nicht genau, darauf hinaus, dass b) erfüllt ist. Nun ist aber a) nicht erfüllt, da a), b), c') miteinander unvereinbar sind. Man findet vielmehr

$$a') \quad v_+ - v_- = -\frac{2f}{3kT} = -\frac{2nf}{3p},$$

was bis auf den Zahlenfaktor mit (9) übereinstimmt.”

^[6]In the equation below, the left-hand side should be $\frac{p}{m}$.

$$^{[7]} \text{Eq. (11) implies } \frac{v_p - v_n}{v_p + v_n} = \frac{u_n - u_p}{u_n + u_p}.$$

^[8]A tangential temperature gradient at the interface between a body and a gas will cause a molecular flow along the surface of the body in the direction of the higher temperature, resulting in a tangential pressure. See *Maxwell 1879*, *Knudsen 1910a*, *1910b*, *1910d*, *Hettner 1924* (which appeared in the same issue of *Zeitschrift für Physik* as the present document), and *Czerny and Hettner 1924*.

Published in *Zeitschrift für Physik* 27 (1924): 1–6. Received 21 July 1924, published August–September 1924. For a manuscript with a different §3 and an additional §4, see [1 042] and [2 098] (§§3 and 4 only). The alternative sections are presented in note 5.

^[1]Radiometer forces are the forces that are responsible for the rotation of a radiometer, a device consisting of vanes, blackened on one side and reflective on the other, mounted on a spike, and enclosed in a partially evacuated container. Because the rotational motion of the vanes starts when the device is illuminated, it was initially thought that it was caused by light pressure. It was later realized that tangential forces exerted by gas molecules in the container, as a result of temperature gradients, are responsible for the motion (see, e.g., *Brush 1976*, chap. 5.5, for a historical overview). Einstein had been interested in radiometer forces before: in 1919 he suggested the theory of the radiometer as a dissertation topic to his cousin Edith Einstein (see Edith Einstein to Einstein, 29 April 1919 [Vol. 9, Doc. 31]). For his continued interest in the topic, see also Einstein to Paul Epstein, 4 June 1920 (Vol. 10, Doc. 42), and Edith Einstein to Einstein, 4 December 1921 (Vol. 12, Doc. 310). Edith Einstein's dissertation was published as *Einstein, E. 1922*.

^[2]See *Knudsen 1910c*.

^[3]In the equation, η should be n .

^[4]In eq. (9) as well as in (10a) below, $\frac{1}{6}$ should be $\frac{1}{3}$.

^[5]At this point the manuscript continues with a different §3 and an additional §4.

“§3. Wand mit Temperatursprung

In dem Falle, dass durch Bestrahlung oder sonstwie eine Temperaturdifferenz der beiden Wandflächen aufrecht erhalten wird, erhalten wir analoge Wirkungen, auch wenn kein Wärmestrom im Gase berücksichtigt wird. Wir betrachten wieder den Fall, dass die Kommunikation der Gasteile zu beiden Seiten der Wand eine solche ist, dass Druckausgleich praktisch vollständig erfolgt. Dem entspricht die Gleichung^[6]

$$p = 2v_n u_n = 2v_p u_p \quad \dots (11)$$

Setzt man

$$\Delta v = v_p - v_n \quad v = \frac{1}{2}(v_p + v_n)$$

$$\Delta u = u_p - u_n \quad u = \frac{1}{2}(u_p + u_n),$$

so erhält man^[7]

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta T}{2T} \quad \dots (11a)$$

Ist eine kleine Oeffnung (σ) in der Wand, so bezeichnet $-\Delta v$ die Intensität des Molekülstromes durch die Öffnung. Mit Rücksicht auf die Relationen

$$-\Delta v = nv$$

$$v = \frac{1}{6}nu$$

erhält man hieraus

$$v = \frac{1}{12}u\frac{\Delta T}{T} \quad \dots (11b)$$

welche Relation in diesem Falle an die Stelle von (10a) tritt. Um den Vergleich übersichtlicher zu gestalten, merken wir an, dass (10a) auch in der Form

$$v = -\frac{1}{12}u\lambda\frac{\partial T}{\partial x} \quad \dots (9b)$$

geschrieben werden kann.

§4.

Prinzipielles zu den bisherigen Überlegungen.

Befindet sich ein Gas im thermodynamischen Gleichgewicht, so sind an jeder Stelle in jeder Richtung die drei Bedingungen erfüllt

a) $v_+ = v_-$ (Strömungs-Gleichgewicht)

b) $mu_+v_+ = mu_-v_-$ (Gleichgewicht der Impulsströme)

c) $\frac{1}{2}mu_+^2v_+ = \frac{1}{2}mu_-^2v_-$ (Gleichgewicht der Wärmeströme)

Findet ein Wärmestrom statt, so ist c) nicht erfüllt, sondern durch

c') $f = \frac{1}{2}m(u_+^2v_+ - u_-^2v_-)$

zu ersetzen.

Ist $f \neq 0$, d.h. besteht ein Wärmestrom, so können a) und b) nicht gleichzeitig erfüllt sein. Im freien Gase wird keine Strömung vorhanden, also a) erfüllt sein. An die Stelle von b) tritt dann

b') $i = mu_+v_+ - mu_-v_- = \frac{f}{u}$.

Es ist also mit dem Wärmestrom ein Impulsstrom i verbunden, der sich als Kraftwirkung auf gegen λ kleine Körper äussert, die an jene Stelle gebracht werden.

Ist die betrachtete Stelle keine freie Stelle, sondern befindet sich dort ein gegen λ grosses Blättchen, welches mit seine Fläche senkrecht gegen den Wärmestrom gestellt ist, so findet an ihm Druck-Gleichgewicht statt. Dies kommt ungefähr, wenn auch nicht genau, darauf hinaus, dass b) erfüllt ist. Nun ist aber a) nicht erfüllt, da a), b), c') miteinander unvereinbar sind. Man findet vielmehr

a') $v_+ - v_- = -\frac{2f}{3kT} = -\frac{2nf}{3p}$,

was bis auf den Zahlenfaktor mit (9) übereinstimmt.”

^[6]In the equation below, the left-hand side should be $\frac{p}{m}$.

^[7]Eq. (11) implies $\frac{v_p - v_n}{v_p + v_n} = \frac{u_n - u_p}{u_n + u_p}$.

^[8]A tangential temperature gradient at the interface between a body and a gas will cause a molecular flow along the surface of the body in the direction of the higher temperature, resulting in a tangential pressure. See *Maxwell 1879*, *Knudsen 1910a*, *1910b*, *1910d*, *Hettner 1924* (which appeared in the same issue of *Zeitschrift für Physik* as the present document), and *Czerny and Hettner 1924*.